

نام:
نام خانوادگی:
پایه تحصیلی: کلاس:

شماره صندلی:

مدت زمان امتحان:

تاریخ امتحان:

نام امتحان:

(۱) جاهای خالی را با عبارت های مناسب پر کنید: (۱ نمره)

(الف) طول کمان روبه رو به زاویه مرکزی α در دایره ای به شعاع R برابر $\frac{\alpha}{360} \times 2\pi R$ است.

(ب) مرکز دایره محاطی داخلی هر مثلث، نقطه هم‌رسی است.

(ج) بازتاب نسبت به خط دارای نقطه ثابت تبدیل است.

(د) دوران شیب خط را حفظ نمی کند.

(۲) کدام گزاره درست و کدام نادرست است. (۱ نمره)

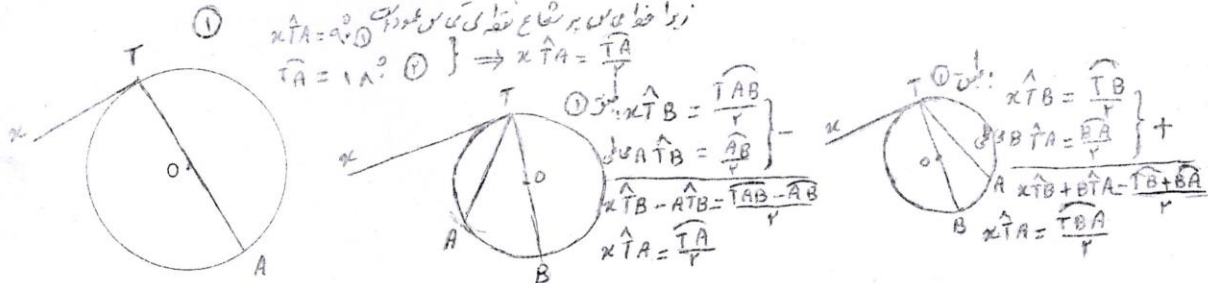
(الف) دوزنقه ی متساوی الساقین یک چهار ضلعی هم محیطی و هم محاطی است. *نادرست*

(ب) شعاع دایره محاطی هر n ضلعی برابر است با مساحت آن چندضلعی تقسیم بر محیط آن. *نادرست*

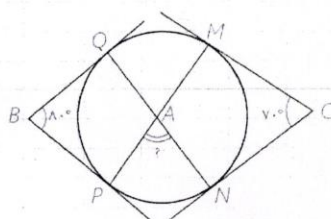
(ج) حاصل ترکیب دو بازتاب محوری با محورهای موازی، یک انتقال است. *درست*

(د) بازتاب محوری جهت شکل را حفظ نمی کند. *درست*

(۳) قضیه: ثابت کنید اندازه هر زاویه ظلی برابر نصف کمان مقابل آن زاویه است. (۱/۵ نمره)

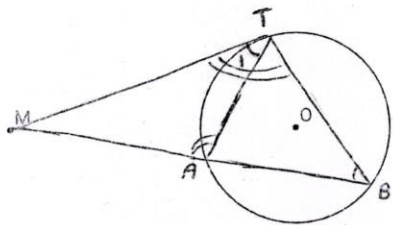


(۴) در شکل مقابل اضلاع زاویه های B و C بر دایره مماسند. اندازه $\hat{A}$ چند درجه است؟ (۱/۵ نمره)



$$\begin{aligned} \hat{A} &= \frac{m\widehat{BQ} + m\widehat{CP} + m\widehat{NP} - m\widehat{PQ}}{2} \Rightarrow m\widehat{BQ} + m\widehat{CP} + m\widehat{NP} - m\widehat{PQ} = 140 \\ \hat{V} &= \frac{m\widehat{BQ} + m\widehat{CP} + m\widehat{NP} - m\widehat{NP}}{2} \Rightarrow m\widehat{BQ} + m\widehat{CP} = 140 \\ 2m\widehat{BQ} + 2m\widehat{NP} &= 140 \Rightarrow m\widehat{BQ} + m\widehat{NP} = 70 \Rightarrow \hat{A} = \frac{140}{2} = 70^\circ \end{aligned}$$

(۴) قضیه: ثابت کنید هرگاه M نقطه ای بیرون دایره باشد و از M مماس و قاطعی نسبت به دایره رسم کنیم، مربع اندازه مماس برابر است با حاصلضرب اندازه های دو قطعه قاطع. (۱/۵ نمره)

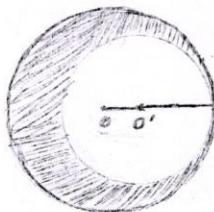


$$MT^2 = MA \cdot MB \quad \text{کلمه}$$

$$\triangle MTA, \triangle MTB : \begin{cases} \hat{M} = \hat{M} \\ \hat{ATM} = \hat{BTM} \end{cases} \Rightarrow \triangle MTA \sim \triangle MTB \Rightarrow \frac{MA}{MT} = \frac{MT}{MB}$$

$$\Rightarrow MT^2 = MA \cdot MB$$

(۵) طول خط المکزین دو دایره مماس درونی ۲ سانتی متر و مساحت ناحیه محدود بین آنها 16π سانتی متر مربع است. طول شعاع های دو دایره را به دست آورید. (۱/۵ نمره)



$$R - R' = d = 2$$

$$S - S' = 16\pi$$

$$\pi R^2 - \pi R'^2 = 16\pi$$

$$R^2 - R'^2 = 16$$

$$(R - R')(R + R') = 16$$

$$2(R + R') = 16$$

$$\begin{cases} R + R' = 8 \\ R - R' = 2 \end{cases}$$

$$2R = 10$$

$$R = 5 \Rightarrow R' = 3$$

(۶) دایره های $C(O, 10)$ و $C'(O', 2)$ با طول خط المکزین $d = 17$ مفروضند. طول مماس مشترک خارجی دو دایره را محاسبه کنید. (۱ نمره)

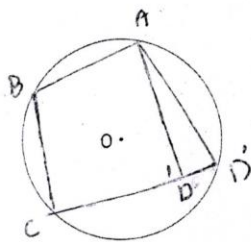
$$TT' = \sqrt{d^2 - (R - R')^2} = \sqrt{17^2 - (10 - 2)^2} = \sqrt{289 - 64} = \sqrt{225} = 15$$

(۷) اگر شعاع دایره محاطی داخلی و h_a و h_b و h_c اندازه های سه ارتفاع مثلث باشند، ثابت کنید:

$$\left. \begin{aligned} h_a = \frac{rs}{a} &\Rightarrow \frac{1}{h_a} = \frac{a}{rs} \\ h_b = \frac{rs}{b} &\Rightarrow \frac{1}{h_b} = \frac{b}{rs} \\ h_c = \frac{rs}{c} &\Rightarrow \frac{1}{h_c} = \frac{c}{rs} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{a+b+c}{rs} = \frac{2p}{rs} = \frac{p}{s} = \frac{p}{pr} = \frac{1}{r}$$

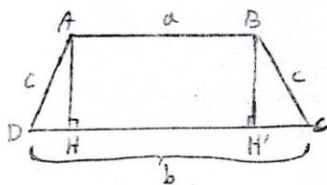
(۱ نمره)

۱۰ ثابت کنید اگر در یک چهار ضلعی زاویه های مقابل یکدیگر باشند آنگاه آن چهار ضلعی محاطی است. (۱/۵ نمره)



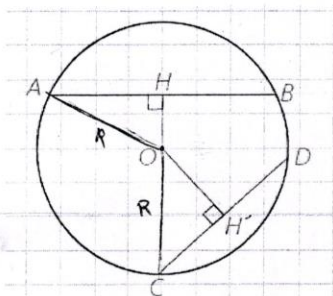
فرض: $\hat{A} + \hat{C} = \hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$
 حکم: هر ضلعی ABCD محاطی است.
 اثبات: بر سه نقطه A و B و C دو دایره یک خط راست نیستند و این دایره ای که گذرانیم (مرکز این دایره نقطه جبرس خود منصفه است). اگر این دایره را در D قطع در امتداد CD دایره را در D' قطع می کنند و داریم: $\hat{B} + \hat{D}' = 180^\circ$
 طبق فرض: $\hat{B} + \hat{D} = 180^\circ \Rightarrow \hat{B} + \hat{D} = \hat{B} + \hat{D}' \Rightarrow \hat{D} = \hat{D}'$
 $\angle ADD' : \hat{D}_1 > \hat{D}'$
 و این تناقض است. پس حکم درست است.

۹ یک ذوزنقه هم محاطی و هم محیطی است. ثابت کنید مساحت این ذوزنقه برابر است با میانگین حسابی دو قاعده آن ضرب در میانگین هندسی آن ها. (۱/۵ نمره)



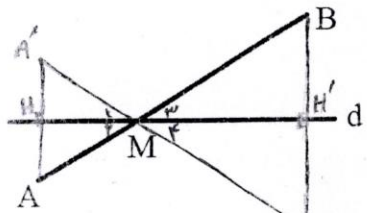
حکم: $S_{ABCD} = \frac{1}{2} (a+b) \times \sqrt{ab}$
 اثبات: چون ذوزنقه محاطی است و پس مساوی الساقین است.
 و چون محیطی است پس: $2c = a+b \Rightarrow c = \frac{a+b}{2}$
 $DH = CH' = \frac{b-a}{2}$
 $AH^2 = AD^2 - DH^2 = c^2 - \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 = \frac{4ab}{4}$
 $AH = \sqrt{ab}$
 $S_{ABCD} = \frac{1}{2} (a+b) \times \sqrt{ab}$

۱۱ در دایره $C(O, R)$ نشان دهید $AB > CD$ اگر و تنها اگر $OH < OH'$. (۲ نمره)



فرض: $AB > CD$ حکم: $OH < OH'$
 اثبات: $AB > CD \Rightarrow \frac{AB}{2} > \frac{CD}{2} \Rightarrow AH > CH' \Rightarrow AH^2 > CH'^2$
 $\Rightarrow R^2 - OH^2 > R^2 - OH'^2 \xrightarrow{\text{در طرفین منهای R^2}} -OH^2 > -OH'^2 \xrightarrow{\text{جمله عکس می شود}} OH^2 < OH'^2 \Rightarrow OH < OH'$
 عکس: فرض: $OH < OH'$ حکم: $AB > CD$
 برهان خلف: اگر $AB > CD$ نباشد داریم: $AB = CD \Rightarrow OH = OH'$ تناقض
 $AB < CD \Rightarrow OH > OH'$ تناقض
 در حکم درست است یعنی $AB > CD$ است.

۱۲ قضیه: ثابت کنید در حالتی که پاره خط AB محور بازتاب را در نقطه ای مانند M قطع کند، طول پاره خط AB با طول بازتابش برابر است. (می دانیم در بازتاب طول پاره خطی که فقط یکی از نقاط انتهایی آن روی محور بازتاب



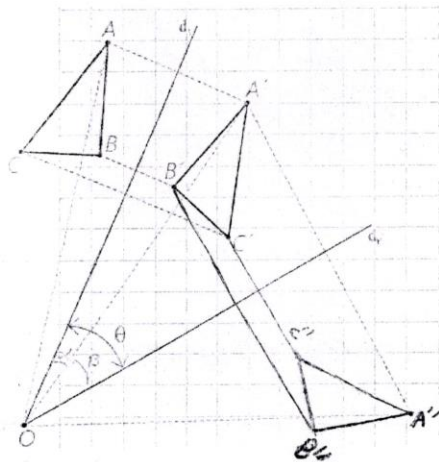
$$AB = AM + MB$$

$$A'B' = A'M + M'B'$$

$$MA = MA' \text{ و } MB = MB' \Rightarrow AB = A'B'$$

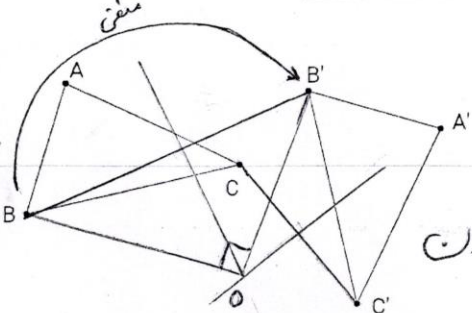
باشد، حفظ می شود.) (۱/۵ نمره)
بازتاب نقطه A نسبت به خط d پیدا کرده و آن را A' بنامیم.
پاره خط MA' را رسم می کنیم و ثابت می کنیم که بازتاب نقطه B یعنی B' نیز بر امتداد MA' واقع است. H وسط AA' و H' وسط BB' است.
طبق تعریف بازتاب نقطه H و H' روی خط d هستند و در این خط d
نیم زاویه های $\angle MA'A$ و $\angle MB'B$ است پس: $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$ $\hat{M}_3 = \hat{M}_4$
پس $\hat{M}_1 = \hat{M}_4$ و $\hat{M}_2 = \hat{M}_3$ $\Rightarrow \hat{M}_1 = \hat{M}_4$ و $\hat{M}_2 = \hat{M}_3$
پس $\angle MA'A = \angle MB'B$ و $\angle MA'B' = \angle MB'A$ پس $MA = MA'$ و $MB = MB'$ پس $AB = A'B'$
بر هم منطبق است پس اضلاع MA و MA' و MB و MB' هم منطبق و برابر است.

۱۳ در شکل، دو خط d_1 و d_2 با زاویه θ یکدیگر را قطع کرده اند. مثلث $A'B'C'$ بازتاب مثلث ABC نسبت به خط d_1 است. بازتاب مثلث $A'B'C'$ را نسبت به خط d_2 رسم کنید و آن را مثلث $A''B''C''$ بنامید. الف) نشان دهید: $\angle AOA'' = 2\theta$ (ب) اندازه زاویه های BOB'' و COC'' چقدر است؟ (ج) با چه تبدیلی می توان مثلث $A''B''C''$ را تصویر مثلث ABC دانست؟ (د) چه نتیجه ای می گیرید؟ (۲ نمره)



الف)
 $\angle AOA'' = \angle AOA' + \angle A'OA'' = 2\alpha + 2\beta = 2(\alpha + \beta) = 2\theta$
ب) به دلیل مشابه $\angle BOB'' = \angle COC'' = 2\theta$
ج) دوران به مرکز O و زاویه 2θ
د) ترکیب دو بازتاب محوری با محورهای متقاطع یک دوران است

۱۴ در شکل زیر مثلث $A'B'C'$ دوران یافته مثلث ABC است. مرکز و زاویه و جهت دوران را روی شکل مشخص کرده و نحوه انجام این کار را شرح دهید. (۱/۵ نمره)



می دانیم مرکز دوران، نقطه ای همبسی محوری منصفی می
پاره خط های AA' است که هر نقطه و تقاطعش را بهم وصل
کنند پس کافی است محوری منصفی های BB' و CC'
را رسم کنیم تا یکدیگر را در نقطه O قطع کنند. O مرکز دوران
است. زاویه دوران 40° است.
جهت دوران منفی است. (در جهت عقربه های ساعت است)