

نوبل

نام :

نام خانوادگی :

پایه تحصیلی : کلاس :

نام امتحان : تاریخ امتحان: مدت زمان امتحان : شماره صندلی :

1. مفاهیم زیر راه تعریف کنید.(1 نمره)

الف) پیشامد

ب) گزاره نما

2. با استفاده از جدول ارزش گزاره ها هر یک از موارد زیر را ثابت کنید. (2 نمره)

الف) $\sim(p \Rightarrow q) = p \wedge \sim q$

ب) $p = p \wedge (p \vee q)$

3. ثابت کنید هرگاه n عددی صحیح و n^2 مضرب 3 باشد آنگاه n نیز مضرب 3 است. (1 نمره)

4. ابتدا ارزش هر یک از گزاره های زیر را مشخص کرده سپس نقیض آن ها را بدست آورید. (2 نمره)

الف) $\exists x \in R ; |x + \frac{1}{x}| < 2$

ب) $\forall x \in N \quad \exists y \in N ; y - x = 6$

5. اگر سه عضو از مجموعه ی متناهی A کم کنیم تعداد زیر مجموعه های آن 896 واحد کم میشود ؛ مشخص کنید که مجموعه ی A چند عضو و چند زیر مجموعه دارد؟ (1.5 نمره)

6. اگر n عدد طبیعی ؛ A_n بازه ی $((-1)^n, 2n)$ باشد چند عدد صحیح به $U_{n=1}^4 A_n$ تعلق دارد؟ (1.5 نمره)

7. تعداد افراز های مجموعه ی $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ که شامل فقط یک مجموعه ی تک عضوی باشد کدام است؟ (1 نمره)

8. به کمک روش عضو گیری هر یک از موارد زیر را ثابت کنید. (1 نمره)

الف) اگر $A \subseteq B$ باشد آنگاه $A \cap B = A$

ب) اگر $A \cap B = \emptyset$ باشد آنگاه $A \subseteq B'$

9. به کمک جبر مجموعه ها ثابت کنید. (2 نمره)

الف) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

ب) $[A \cap (A' \cup B)] \cup [B \cap (A' \cup B')] = B$

10. با توجه به مجموعه های داده شده نمودار $A \times B$ را برای هر کدام رسم کنید. (1 نمره)

الف) $A = \{-1, 1\}$, $B = \{1, 4\}$

ب) $A = \{1, 3\}$, $B = \{-1, 2\}$

11. با استفاده از اصول احتمال ثابت کنید برای هر دو پیشامد دلخواه A و B داریم: (1 نمره)

$$p(A - B) = p(A) - p(A \cap B)$$

12. از کیسه ای شامل 5 مهره ی سفید و 6 مهره ی قرمز سه مهره به تصادف خارج میکنیم مطلوب است (1 نمره)

احتمال آن که :

الف) هر دو مهره ی خارج شده هم رنگ باشند.

ب) دو مهره با رنگ های متفاوت باشند.

13. عددی از مجموعه ی اعداد $A = \{238, 239, \dots, 657\}$ انتخاب میکنیم احتمال آنکه عدد انتخابی (1.5 نمره)

الف) مضرب 4 و 6 باشد

ب) مضرب 4 یا 6 باشد

ج) فقط مضرب یکی از اعداد فوق باشد

14. دو تاس را پرتاب میکنیم اگر مجموع اعداد رو شده زوج آمد یک تاس دیگر و اگر مجموع اعداد رو شده فرد آمد 3 سکه را پرتاب میکنیم احتمال آن را بیابید که دقیقا 2 سکه رو ظاهر شود یا مجموع 3 تاس کمتر از 8 باشد. (1.5 نمره)

15. تاسی به گونه ای ساخته شده است که احتمال وقوع هر عدد اول سه برابر اعداد دیگر است این تاس را پرتاب میکنیم احتمال آنکه عدد رو شده زوج باشد چقدر است؟ (1 نمره)

پایه تحصیلی : کلاس :

نام امتحان :

تعريف اعتبار مجموعه A که دارای تعداد n عضو است

(۲)

در امتحان شماره اول

(۱,۵)

$$A_1 = (-1, 2)$$

$$A_2 = (2, 8)$$

$$A_3 = (-3, 4)$$

$$A_4 = (4, 1)$$

$$\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = (-3, 1) \Rightarrow -2, -1, 0, 1, \dots, \checkmark$$

۱۵ عضو دارد

(۷)

$$\left\{ \begin{array}{l} \{ - \} \{ - \} \{ - \} \{ - \} \{ - \} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} = 8 \\ \{ - \} \{ - \} \{ - \} \{ - \} \{ - \} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 16 \end{array} \right\} \Rightarrow 8 + 16 = 24$$

(۱)

(۸)

برهان خلف: فرض کنیم $A - B \neq \emptyset$ پس حداقل یک عضو دارد. داریم:

$$\forall x \in A - B \Rightarrow x \in A \wedge x \notin B \Rightarrow \begin{cases} x \in A \Rightarrow x \in B \\ \wedge \\ x \notin B \Rightarrow x \in B' \end{cases}$$

(۱,۵)

به تناقض رسیدیم پس فرض خلف باطل، حکم ثابت می‌شود.

$$\text{ب) } \forall x \in A \Rightarrow x \in B'$$

(۱,۵)

$$\forall x \in A \stackrel{A \cap B = \emptyset}{\Rightarrow} x \notin B \Rightarrow x \in B'$$

$$\text{الف) } A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$$

$$\text{رابطه: } = (A \cap B') \cap (A \cap C')$$

$$= A \cap (B' \cap C')$$

$$= A - (B \cup C)$$

(۱)

مستحب

(۳)

به احتمال رو احتمال نرم اول

$$\rightarrow [A \cap (A \cup B)] \cup [B \cap (A \cup B)] = B \quad (9)$$

$$\text{مستند} \quad " = \left[\underbrace{(A \cap A')}_{\emptyset} \cup (A \cap B) \right] \cup \left[(B \cap A') \cup \underbrace{(B \cap B')}_{\emptyset} \right]$$

$$= [\emptyset \cup (A \cap B)] \cup [(B \cap A') \cup \emptyset]$$

$$= (A \cap B) \cup (B \cap A')$$

$$= B \cap \underbrace{(A \cup A')}_{U}$$

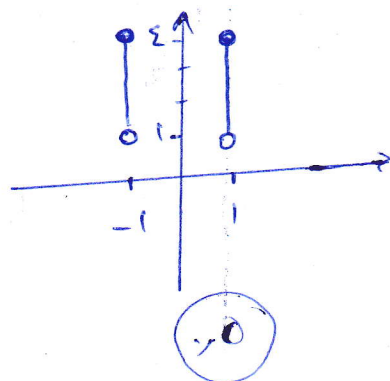
$$= B \cap U = B \quad \text{مستند، استعاره}$$

(1)

(الف)

$$A = \{-1, 1\}$$

$$B = (1, 2]$$

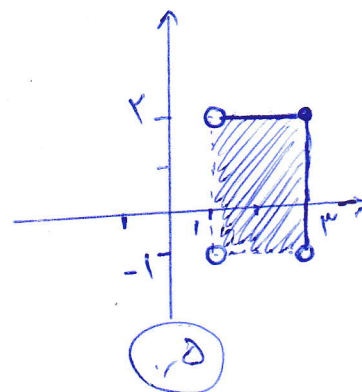


(د)

→

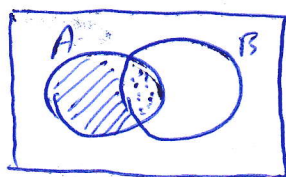
$$A = (1, 3]$$

$$B = (-1, 2]$$



(د)

(۱۰)



مردانیم : $(A - B)$, $(A \cap B)$ و $(A - B)$ داریم

$$(A - B) \cup (A \cap B) = A$$

$$P \left(\underbrace{(A - B) \cup (A \cap B)}_A \right) = P(A - B) + P(A \cap B)$$

(1)

$$\Rightarrow P(A) = P(A - B) + P(A \cap B)$$

$$\Rightarrow \boxed{P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)}$$

(۱۱)

(ع)

به احتمال ۱۰۰ درصد احتمال نرم اول

۵ سفید
۴ قرمز

مرد سفید یا مرد و قرمز (الف)

$$p(A) = \frac{\binom{5}{1} + \binom{4}{1}}{\binom{11}{1}} = \frac{10 + 4}{140} = \frac{14}{140} = \frac{1}{10}$$

۲ سفید و قرمز یا ۲ قرمز و سفید (ب)

$$p(B) = \frac{\binom{5}{2} \binom{6}{1} + \binom{4}{2} \binom{5}{1}}{\binom{11}{2}} = \frac{10 + 10}{140} = \frac{20}{140} = \frac{1}{7}$$

$$757 - 238 = 519 \Rightarrow \text{عدد در مجموع داریم}$$

$$|A| : \left[\frac{757}{8} \right] - \left[\frac{238}{8} \right] = 94 - 29 = 65$$

$$|B| : \left[\frac{757}{7} \right] - \left[\frac{238}{7} \right] = 107 - 34 = 73$$

$$(الف) \quad |A \cap B| = \left[\frac{757}{12} \right] - \left[\frac{238}{12} \right] = 62 - 19 = 43$$

$$\Rightarrow p(A \cap B) = \frac{43}{52} = \frac{1}{12}$$

$$(ب) \quad |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 65 + 73 - 43 = 95$$

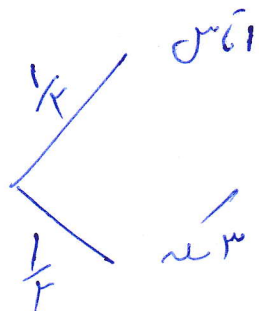
$$\Rightarrow p(A \cup B) = \frac{95}{52} = \frac{1}{5}$$

$$(ج) \quad |A \Delta B| = |A \cup B| - |A \cap B| = 95 - 43 = 52$$

$$p(A \Delta B) = \frac{52}{52} = 1$$

۵) به امکان اعداد احتمال نرم اول

۱) مرادیم در برتاب ۲ آتاس در ۱۸ حالت یعنی نمر از اوضاع مجموع دو عدد در شش زوج در شود.
از طرفی در برتاب ۳ آتاس این به ۲ آتاس در ظاهر شود برابر است!



$$A = \{(1,1), (1,2), (1,3)\}$$

سه برابر با ۳/۸ است.

مجموع آتاس	مجموع	حالت
۲	۱, ۲, ۳, ۴, ۵	حالت ۵
۴	۱, ۲, ۳	حالت ۳
۶	۱	حالت ۱
۸	X	
۱۰	X	
۱۲	X	

مجموع دو عدد ۲ آتاس و ۳ آتاس در مجموع ۱۸ حالت
مجموع دو عدد ۲ آتاس و ۳ آتاس در مجموع ۱۸ حالت

$P(\text{مطلوب}) =$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{9}{18 \times 4} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{8} = \frac{1}{24} + \frac{3}{16} = \frac{11}{48}$$

۱,۵

$$P(1) = x \Rightarrow P(1) + \dots + P(6) = 1$$

$$P(2) = 3x$$

$$P(3) = 3x$$

$$P(4) = x$$

$$P(5) = 3x$$

$$\Rightarrow 12x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{12}$$

$$P(2) + P(4) + P(6) = 5x = \frac{5}{12}$$

۱۵

۱