



نوبل

نام:

نام خانوادگی:

پایه تحصیلی: کلاس:

نام امتحان:

تاریخ امتحان:

مدت زمان امتحان:

شماره صندلی:

ردیف	سؤالات	نمره
۱/۵	ارزش گزاره‌های زیر را تعیین کنید و سپس نقیض هر یک را بنویسید. الف) $\forall x \in \mathbb{Z}; \frac{4x-5}{7} = 0$ ب) $\forall x \in \mathbb{N} \quad \exists y \in \mathbb{N}; x > y$	۱
۲	ارزش گزاره‌های زیر را مشخص نمایید. الف) اگر p نادرست باشد، ارزش گزاره‌ی $p \wedge q \Rightarrow r$ را بررسی کنید. ب) اگر p درست باشد، ارزش گزاره‌ی $s \Rightarrow p \vee q$ را بررسی نمایید.	۲
۱	ثابت کنید اگر $a \in \mathbb{Z}$ و a^2 مضرب ۷ باشد، آن‌گاه a مضرب ۷ است.	۳
صفحه ی ۱ از ۴		

۴	ثابت کنید که گزاره ی $(\sim p \Rightarrow (\sim q \Rightarrow r))$ با گزاره ی $(p \vee q) \vee r$ هم‌ارزند.	۱
۵	مجموعه ی ۵ عضوی را به چند حالت می‌توان به ۳ زیرمجموعه افراز کرد؟	۱
۶	اگر به تعداد اعضای یک مجموعه، ۴ عضو اضافه کنیم، به تعداد زیرمجموعه‌های آن ۱۲۰ واحد اضافه می‌شود. این مجموعه چند زیرمجموعه ی تک عضوی دارد؟	۱/۵
۷	به کمک جبر مجموعه‌ها ثابت کنید: الف) $(A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A) = A \cup B$ ب) $(A \cap B) - (B \cap C) = (A - B') - C$	۲
صفحه ی ۲ از ۴		

۱/۵	اگر $A = (-2, 1)$ و $B = [0, 2]$ باشند، نمودار $A^2 - A \times B$ را رسم نمائید.	۸
۱	اگر $A = \{a, b, c\}$ و $B = \{b, c, d, e\}$ مجموعه $A^2 \cup B^2$ چند عضو دارد؟	۹
۱	با استفاده از روش عضوگیری ثابت کنید که اگر $A \subseteq B$ و $C \subseteq D$ آنگاه $A \cap C \subseteq B \cup D$.	۱۰
۲	دو تاس سالم را با هم پرتاب می‌کنیم. مطلوب است: الف) احتمال اینکه مجموع دو عدد رو شده مضرب ۴ باشد. ب) احتمال اینکه مجموع دو عدد رو شده حداقل ۱۱ باشد.	۱۱
۲	از مجموعه اعداد $\{1, 2, \dots, 200\}$ عددی به تصادف انتخاب می‌کنیم. مطلوب است احتمال آن که عدد انتخابی الف) بر ۴ بخش پذیر باشد.	۱۲
صفحه ی ۳ از ۴		

	(ب) بر ۵ بخش پذیر باشد ولی بر ۶ بخش پذیر نباشد. (ج) نه بر ۴ و نه بر ۶ بخش پذیر باشد.	
۱/۵	تاسی به گونه‌ای ساخته شده است که احتمال وقوع هر عدد اول ۳ برابر احتمال وقوع هر عدد غیر اول است. اگر در پرتاب این تاس، A پیشامد وقوع عددی کوچک‌تر از ۴ باشد، $P(A)$ را بیابید.	۱۳
۱	اگر $2P(B) = P(A) = 3P(A \cap B)$ باشد، حاصل $\frac{P(A-B)}{P(A \cup B)}$ را بدست آورید.	۱۴
صفحه ی ۴ از ۴		

نام :

نام خانوادگی :

پایه تحصیلی : کلاس :

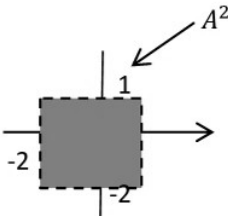
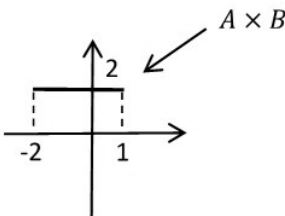
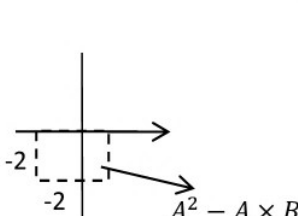
شماره صندلی :

مدت زمان امتحان :

تاریخ امتحان :

نام امتحان :

۱	الف) به عنوان مثال به ازای $x = 0$ داریم: $\frac{4(0)-5}{7} = -\frac{5}{7} \neq 0$. پس ارزش گزاره نادرست است. نقیض: $\exists x \in \mathbb{Z}; \frac{4x-5}{7} \neq 0$ ب) ارزش گزاره نادرست. اگر $x = 1$، هیچ y ای در $\mathbb{N}$ وجود ندارد که $x > y$ باشد. نقیض: $\exists x \in \mathbb{N} \quad \forall y \in \mathbb{N}; x \leq y$
۲	الف) اگر p نادرست باشد، آنگاه گزاره‌ی عطفی $p \wedge q$ در هر دو حالت q با ارزش درست و نادرست، گزاره‌ای نادرست است. و چون $p \wedge q \Rightarrow r$ گزاره‌ای شرطی است که مقدم آن ارزش نادرست دارد پس به انتفاء مقدم ارزش گزاره‌ی شرطی فوق درست است. ب) اگر p درست باشد، گزاره‌ی فصلی $p \vee q$ در هر دو حالت q با ارزش درست و نادرست، گزاره‌ای درست می‌باشد. دو حالت اتفاق می‌افتد: اگر S درست باشد، $S \Rightarrow p \vee q$ دارای ارزش درست است. اگر S نادرست باشد، $S \Rightarrow p \vee q$ به انتفاء مقدم درست است. بنابراین $S \Rightarrow p \vee q$ دارای ارزش درست می‌باشد.
۳	عکس نقیض: اگر $a \neq 7k$ آنگاه $a^2 \neq (7k)^2 \neq 49k^2 \neq 7(7k^2) \neq 7k' \rightarrow a^2 \neq 7k$
۴	$\sim p \Rightarrow (\sim q \Rightarrow r) \equiv \sim(\sim p) \vee (\sim q \Rightarrow r) \equiv p \vee (\sim(\sim q) \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$
۵	$5 = 3 + 1 + 1$ تعداد افزازها $= \frac{\binom{5}{2}\binom{3}{2}\binom{1}{1}}{2!} = \frac{10 \times 2 \times 1}{2} = 10$ $5 = 2 + 2 + 1$ تعداد افزازها $= \frac{\binom{5}{2}\binom{3}{2}\binom{1}{1}}{2!} = \frac{10 \times 3 \times 1}{2} = 15$ تعداد کل افزازها $= 10 + 15 = 25$
۶	اگر تعداد اعضای مجموعه مورد نظر برابر n باشد، آنگاه داریم: $2^{n+4} - 2^n = 120 \Rightarrow 2^n \times 2^4 - 2^n = 120 \Rightarrow 16 \times 2^n - 2^n = 120 \Rightarrow 15 \times 2^n = 120 \Rightarrow 2^n = 8 \Rightarrow n = 3$ تعداد زیرمجموعه‌های تک‌عضوی $= \binom{3}{1} = 3$
۷	الف) $(A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A) = (A \cap B') \cup (A \cap B) \cup (B \cap A') = (A \cap (B' \cup B)) \cup (B \cap A') = (A \cap U) \cup (B \cap A') = A \cup (B \cap A') = (A \cup B) \cap (A \cap A') = (A \cup B) \cap U = A \cup B$ ب) $(A \cap B) - (B \cap C) = (A \cap B) \cap (B \cap C)' = (A \cap B) \cap (B' \cup C') = [(A \cap B) \cap B'] \cup [(A \cap B) \cap C'] = \emptyset \cup [(A \cap B) \cap C'] = (A \cap B) \cap C' = (A \cap (B')') \cap C' = (A - B') \cap C' = (A - B') - C$

			۸																																																	
$n(A) = 3$ ، $n(B) = 4$ ، $n(A \cap B) = 2$ $n(A^2 \cup B^2) = n(A^2) + n(B^2) - n(A^2 \cap B^2) = (n(A))^2 + (n(B))^2 - (n(A \cap B))^2$ $= 9 + 16 - 4 = 21$			۹																																																	
$\forall x \in A \cap A \rightarrow x \in A \wedge x \in C \xrightarrow{A \subseteq B, C \subseteq D} x \in B \wedge x \in D \rightarrow x \in B \cap D \xrightarrow{B \cap D \subseteq B \cup D} x \in B \cup D$			۱۰																																																	
<table border="1" data-bbox="173 571 423 861"><tr><td>+</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td></tr><tr><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td></tr><tr><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td></tr><tr><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td></tr><tr><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td></tr><tr><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td></tr></table> الف) $n(S) = 6 \times 6 = 36$ $p(4) + p(8) + p(12) =$ $\frac{3}{36} + \frac{5}{36} + \frac{1}{36} = \frac{9}{36}$ ب) $p(11) + p(12) = \frac{2}{36} + \frac{1}{36} = \frac{3}{36}$			+	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	7	2	3	4	5	6	7	8	3	4	5	6	7	8	9	4	5	6	7	8	9	10	5	6	7	8	9	10	11	6	7	8	9	10	11	12	۱۱
+	1	2	3	4	5	6																																														
1	2	3	4	5	6	7																																														
2	3	4	5	6	7	8																																														
3	4	5	6	7	8	9																																														
4	5	6	7	8	9	10																																														
5	6	7	8	9	10	11																																														
6	7	8	9	10	11	12																																														
$n(A) = \left\lfloor \frac{200}{4} \right\rfloor = 50$ ، $n(S) = 200$ $p(A) = \frac{50}{200} = \frac{1}{4}$ (الف) $n(B) = \left\lfloor \frac{200}{5} \right\rfloor = 40$ ، $n(B \cap C) = \left\lfloor \frac{200}{5 \times 6} \right\rfloor = 6$ (ب) $p(B - C) = p(B) - p(B \cap C) = \frac{40}{200} - \frac{6}{200} = \frac{34}{200}$ $n(A) = \left\lfloor \frac{200}{4} \right\rfloor = 50$ ، $n(C) = \left\lfloor \frac{200}{6} \right\rfloor = 33$ ، $n(A \cap C) = \left\lfloor \frac{200}{12} \right\rfloor = 16$ (ج) $p(A' \cap C') = 1 - p(A) - p(C) + p(A \cap C) = 1 - \frac{50}{200} - \frac{33}{200} - \frac{16}{200} = \frac{200 - 50 - 33 - 16}{200} = \frac{101}{200}$			۱۲																																																	
$S = \{1, 2, \dots, 6\}$ $p(1) = p(4) = p(6) = x$ ، $p(2) = p(3) = p(5) = 3x$ طبق فرض داریم : از تساوی $p(S) = 1$ داریم: $p(1) + p(2) + p(3) + p(4) + p(5) + p(6) = 1 \Rightarrow x + 3x + 3x + x + 3x + x = 1 \Rightarrow$ $12x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{12}$ $A = \{1, 2, 3\} \rightarrow p(A) = p(1) + p(2) + p(3) = x + 3x + 3x = 7x = \frac{7}{12}$			۱۳																																																	
$p(B) = \frac{3}{2}p(A \cap B)$ ، $p(A) = 3p(A \cap B)$ $p(A - B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 3p(A \cap B) + \frac{3}{2}p(A \cap B) - p(A \cap B) = \frac{7}{2}p(A \cap B)$ $\Rightarrow \frac{p(A - B)}{p(A \cap B)} = \frac{2}{7/2} = \frac{4}{7}$			۱۴																																																	
نام و نام خانوادگی مصحح : مرجان یغمایی		جمع بارم : ۲۰ نمره																																																		
امضاء:																																																				