

نام :

نام خانوادگی :

پایه تحصیلی : کلاس :

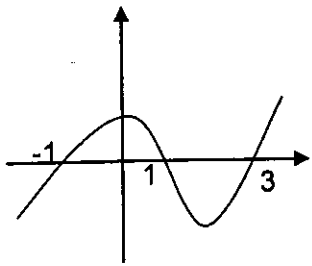
شماره صندلی :

مدت زمان امتحان :

تاریخ امتحان :

نام امتحان :

۲/۵	۱	درستی و نادرستی گزاره های زیر را مشخص کنید. الف) اگر نقاط $A(2,-2)$ و $B(6,4)$ دو سر قطره های یک دایره باشند آنگاه نقطه $C(7,3)$ روی محیط دایره قرار دارد. ب) اگر α و β جواب های معادله $x^2 - 3x + 1 = 0$ باشند، آنگاه $\alpha^2\beta + \beta^2\alpha = 3$ است. پ) برای هر عدد طبیعی n اتحاد $x^n + 1 = (x + 1)(x^{n-1} - x^{n-2} + x^{n-3} - \dots + 1)$ برقرار است. ت) برای هر مقدار حقیقی r ، حد مجموع جملات دنباله هندسی با جمله اول a_1 و قدرنسبت r برابر است با: $S_{\infty} = \frac{a_1}{1-r}$ ث) حاصل $1 = \left[\frac{0}{4}\right]^2 + [\sqrt{2} - \sqrt{3}]$ ([] علامت جزء صحیح است).
۲	۲	جاهای خالی را پر کنید. الف) قرینه نقطه $A(1,2)$ نسبت به نقطه $M(-1,4)$ برابر است با (..... و). ب) معادله درجه دومی که ریشه های آن $1 - \sqrt{2}$ و $1 + \sqrt{2}$ باشد برابر است با پ) دامنه تابع $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{2x^2-5x+3}$ برابر است با ت) اگر $g(x)$ وارون تابع $f(x) = x + \sqrt{x}$ باشد، مقدار $g(12)$ برابر است با
۱/۵	۳	مثلث ABC با رئوس $A(3,0), B(-5,1), C(7,6)$ را در نظر بگیرید. الف) محیط مثلث ABC را به دست آورید. ب) معادله عمود منصف وارد بر ضلع AB را بنویسید. پ) طول ارتفاع AH و مساحت مثلث ABC را بیابید.
۱	۴	برای محافظت از تابش خطرناک مواد رادیواکتیویته، لایه های محافظی وجود دارد که شدت تابش پرتوها پس از عبور از هر یک از آنها نصف می شود. حداقل چند لایه باید استفاده کنیم تا شدت تابش مواد خطرناک دست کم تا ۹۷ درصد کاهش یابد؟
۱	۵	مختصات مرکز دایره ای $O(2, -1)$ است. اگر خط $3x - 4y + m = 0$ بر این دایره مماس و مساحت دایره $\frac{\pi}{25}$ باشد مجموع مقادیر m را بیابید.
۱/۵	۶	معادلات زیر را حل کنید. الف) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) = 8$ ب) $2 + \sqrt{2x^2 - 5x + 2} = x$ پ) $2[x] + [1 - x] = 2$
۱	۷	نامعادله زیر را حل کنید. (با تعیین علامت قدرمطلق ها) $ x-1 - x+3 < 2$

ردیف	شرح سوالات	بارم
۸	یک ماهیگیر می خواهد در کنار رودخانه محوطه ای مستطیل شکل را فنس کشی کند. او هزینه تنها ۱۰۰ متر فنس کشی را در اختیار دارد. ابعاد مستطیل را طوری تعیین کنید که مساحت آن بیشترین مقدار ممکن گردد.	۱
۹	نمودار توابع زیر را رسم کنید. (به روش دلخواه) ت) $y = x-1 - x+2 $; $D_g = [-2, 2]$ ب) $y = x - [x]$ الف) $f(x) = 3 - \sqrt{x+1}$	۳
۱۰	نمودار تابع f بصورت مقابل است. دامنه تابع $y = \sqrt{(4-x^2)f(x)}$ را به دست آورید.	۱
		
۱۱	a را طوری تعیین کنید که تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + a, & x \geq 1 \\ 2x + 3, & x < 1 \end{cases}$ یک به یک باشد.	۱
۱۲	در تابع $f(x) = x^2 - 3x + x$ اگر $1 < x < 2$ باشد، ضابطه وارون تابع را بدست آورید.	۱/۵
۱۳	اگر α و β ریشه های معادله $x^2 - x - 1 = 0$ باشند. معادله درجه دومی را بنویسید که دارای ریشه های $\frac{2\alpha}{\alpha+1}$ و $\frac{2\beta}{\beta+1}$ باشد.	۱
۱۴	مقدار k را چنان بیابید که دو تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-16}{x-4}, & x \neq 4 \\ 2k+6, & x = 4 \end{cases}$ و $g(x) = x+4$ با هم برابر باشند.	۱
	* سربلند و سلامت باشید *	جمع نمرات
		۲۰

سؤال ۲ (الف) $x^2 - 2x - 1 = 0$ $\Rightarrow$ $x = 1 + \sqrt{2}$ $\Rightarrow$ $9 = (1 + \sqrt{2})^2 - (\frac{3}{2})^2$

سؤال ۳ (الف) $AB = \sqrt{(3+0)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$
 $AC = \sqrt{(3-7)^2 + (0-6)^2} = \sqrt{16+36} = \sqrt{52} \rightarrow$ محیط مثلث $ABC = \sqrt{10} + \sqrt{52} + 13$
 $BC = \sqrt{(0-7)^2 + (1-6)^2} = \sqrt{49+25} = 12$

ب) $m_{AB} = \frac{1-0}{-0-3} = \frac{1}{-3} \rightarrow m = \frac{1}{-3} \Rightarrow CH: y = \frac{1}{-3}x + b$

C(7,6) $\Rightarrow y = \frac{1}{-3}x + b \Rightarrow b = 6 - 0 = -2 \Rightarrow CH: y = \frac{1}{-3}x - 2$

ج) $m_{BC} = \frac{1-6}{-0-7} = \frac{-5}{-7} = \frac{5}{7}$

$y_{BC} = \frac{5}{7}x + b$ C(7,6) $\Rightarrow \frac{30}{7} + b = 6 \Rightarrow b = \frac{12}{7}$

$\Rightarrow y = \frac{5}{7}x + \frac{12}{7} \rightarrow AH = \frac{|3x(\frac{5}{7}) + 0x| - \frac{12}{7}}{\sqrt{1 + \frac{25}{49}}} = 4$

$BC = \sqrt{(0-7)^2 + (1-6)^2} = \sqrt{49+25} = 12$

$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} \times 12 \times 4 = 24$

سؤال ۴ $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots \rightarrow S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} = \frac{1 \times (1 - \frac{1}{2^n})}{1 - \frac{1}{2}} = (1 - \frac{1}{2^n})$

$\Rightarrow 1 - \frac{1}{2^n} \geq \frac{99}{100} \Rightarrow \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{100} \Rightarrow 2^n \geq \frac{100}{1} = 100$

$\Rightarrow n = 7$

$$R = \frac{|2 \times 3 - 1 \times (-5) + m|}{\sqrt{2^2 + (-5)^2}} = \frac{|m + 11|}{\sqrt{9+25}} = \frac{|m+10|}{\sqrt{34}} = \frac{|m+10|}{d} \quad (d \text{ là } \sqrt{34})$$

$$\Rightarrow S = \frac{\pi}{r\alpha} = \pi R^2 \Rightarrow R^2 = \frac{1}{r\alpha} \Rightarrow R = \frac{1}{d} = \frac{|m+10|}{d} \Rightarrow |m+10| = 1$$

$$\Rightarrow m+10 = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} m+10=1 \Rightarrow m=1-10=-9 \\ m+10=-1 \Rightarrow m=-1-10=-11 \end{cases}$$

$$\Rightarrow m_1 + m_2 = -9 + (-11) = -20$$

$$\text{đ)} \quad x + \frac{1}{x} = t \Rightarrow t^2 + xt - 1 = 0 \Rightarrow (t-1)(t+1) = 0 \quad (x \text{ là } \sqrt{2})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t=1 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = 1 \Rightarrow x^2 + 1 = x \Rightarrow x^2 - x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 1^2 - 4 = -3 < 0 \\ t=-1 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = -1 \Rightarrow x^2 + 1 = -x \Rightarrow x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow (x+1)^2 = 0 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow r + \sqrt{r^2 - 4n + r} = n \Rightarrow n - r = \sqrt{r^2 - 4n + r} \xrightarrow{\text{bình phương}}$$

$$n^2 - 4n + r = r^2 - 4n + r \Rightarrow n^2 - n - r = 0 \Rightarrow (n+1)(n-r) = 0$$

$$\begin{cases} n = -1 & \text{thỏa} \\ n = r & \text{thỏa} \end{cases}$$

$$\Rightarrow r[n] + [-n] + 1 = r \Rightarrow r[n] + [-n] = 1 \Rightarrow [n] + [n] + [-n] = 1$$

$$\begin{cases} 1) x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = 1 \quad \checkmark \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2) x \notin \mathbb{Z} \Rightarrow [n] \quad -1 = 1 \Rightarrow [n] = r \Rightarrow r, m < r \end{cases}$$

$$|n-1| + |n+3| < 2$$

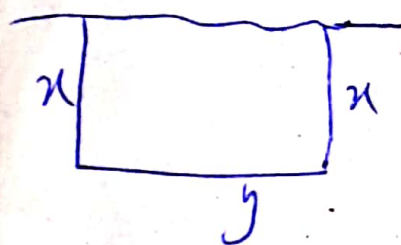
(✓) 100%

$$\left\{ \begin{array}{l} n < -3 \rightarrow -n+1+n+3 < 2 \Rightarrow 4 < 2 = \emptyset \\ -3 < n < 1 \rightarrow -n+1-n-3 < 2 \Rightarrow -2n-2 < 2 \Rightarrow -2n < 4 \Rightarrow n > -2 \\ n > 1 \rightarrow n-1-n-3 < 2 \Rightarrow -2n-4 < 2 \Rightarrow -2n < 6 \Rightarrow n > -3 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow (-2, 1) \checkmark$$

$$\Rightarrow (1, +\infty) \checkmark$$

$$\Rightarrow (-2, +\infty)$$



$$\rightarrow x+y=100 \rightarrow y=-x+100$$

(✓) 100%

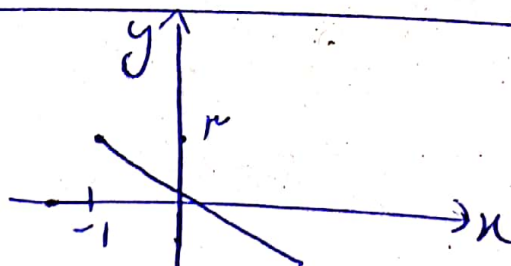
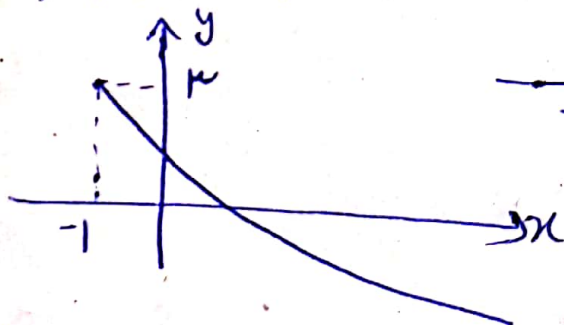
$$S=xy=x(-x+100)=-x^2+100x$$

$$\rightarrow x_s = \frac{-b}{2a} = \frac{-100}{2(-1)} = \frac{-100}{-2} = 50$$

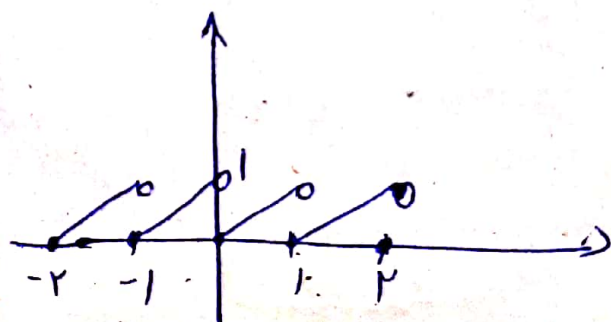
$$\Rightarrow y = -x + 100 = 50$$

ع) 1) $f(x) = -\sqrt{x+1} + 3$

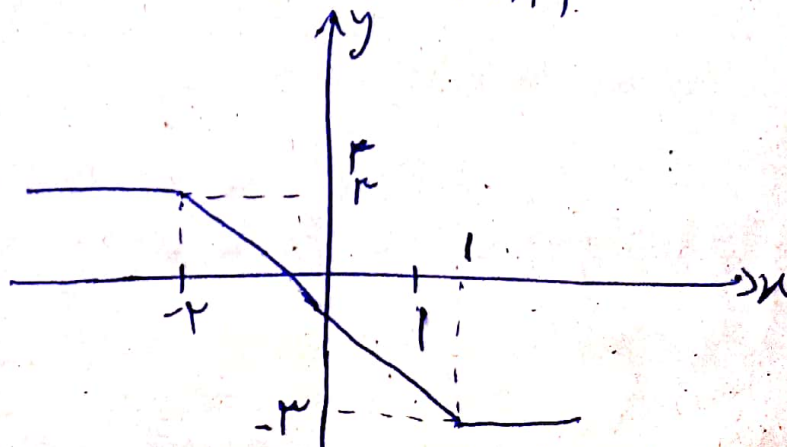
(✓) 100%



2) $y = x - [x]$



3) $y = |x-1| - |x+1|$



$$y = \sqrt{(r-x^r)} f(x) \rightarrow D_y : (r-x^r) f(x) \geq 0$$

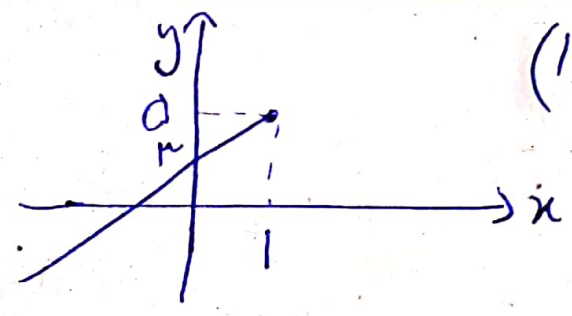
$$\{r-x^r=0 \Rightarrow x=r \Rightarrow x=\pm r$$

$$f(x)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=1 \\ x=r \end{cases}$$

	-r	-1	1	r	r
$r-x^r$	-	+	+	+	-
$f(x)$	-	-	+	-	+
$(r-x^r)f(x)$	+	-	+	-	-

$$\Rightarrow D = (-\infty, -r] \cup [-1, 1] \cup [r, r]$$

$$f(x) = \begin{cases} x^r + a, & x \geq 1 \\ rx + r, & x < 1 \end{cases}$$



سؤال 11

$$a+1 \geq 0 \Rightarrow a \geq -1$$

$$f(x) = |x^r - rx| + x = -x^r + rx + x = -x^r + (r+1)x$$

سؤال 12

$$\begin{aligned} y &= -(x^r - rx + r - r) = -(x-r)^r + r \Rightarrow y - r = -(x-r)^r \\ \Rightarrow r - y &= (x-r)^r \Rightarrow x-r = \pm \sqrt[r]{r-y} \Rightarrow x = \pm \sqrt[r]{r-y} + r \\ \Rightarrow x &= -\sqrt[r]{r-y} + r \Rightarrow f^{-1}(y) = -\sqrt[r]{-y+r} + r \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = \frac{1}{1} = 1 \\ \alpha\beta = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{r\alpha}{\alpha+1} \\ x_2 = \frac{r\beta}{\beta+1} \end{cases} \Rightarrow$$

$$x_1 + x_2 = \frac{r\alpha}{\alpha+1} + \frac{r\beta}{\beta+1}$$

سؤال 13

$$x_1 x_2 = \frac{r\alpha\beta}{(\alpha+1)(\beta+1)} = \frac{-r}{1} = -r$$

$$x^r + rx - r = 0$$

$$\Rightarrow S = \frac{r\alpha\beta + r\alpha + r\beta + r\alpha\beta}{\alpha\beta + \alpha + \beta + 1} = \frac{-r + r}{1} = -r$$

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n^2 - 14}{n - 5}, & n \neq 5 \\ 2k + 4, & n = 5 \end{cases}$$

$$g(n) = n + 5$$

سؤال (14)

$$g(5) = 5 + 5 = 10 = 2k + 4 \Rightarrow 2k = 6 \Rightarrow k = 3$$