



نوبل

نام :

نام خانوادگی :

پایه تحصیلی : کلاس :

شماره صندلی :

مدت زمان امتحان :

تاریخ امتحان :

نام امتحان :

۱	مجموع همه عددهای طبیعی دو رقمی مضرب ۷ را به دست آورید.	۱
۱	اگر $x = \frac{1}{2}$ باشد، حاصل $\frac{x+x^3+x^5+\dots+x^{19}}{x^2-x^4+x^6-x^8+\dots-x^{20}}$ را به دست آورید.	۲
۱	مقدار k را چنان بیابید که یکی از صفرهای تابع $f(x) = x^3 + kx^2 - x - 2$ برابر (-2) باشد. سپس صفرهای دیگر تابع را به دست آورید.	۳
۱	به ازای چند عدد صحیح مثل m معادله $4x^2 - mx + m^2 - 6 = 0$ دو ریشه حقیقی مختلف علامت دارد؟	۴
۱	می‌خواهیم ۲۰۰ کیلوگرم محلول آب نمک ۴ درصدی را به محلول آب نمک ۷ درصدی تبدیل کنیم. اگر نمک به اندازه کافی موجود باشد، چند کیلوگرم نمک باید به آن اضافه کنیم؟	۵
۱	مجموع جواب‌های معادله $x^2 - 4x + 3 = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$ چه قدر است؟	۶

۷	بهر روز یک مجله را به تنهایی ۹ ساعت زودتر از فرهاد تایپ می کند. اگر هر دو با هم کار کنند، در ۲۰ ساعت این کار انجام می شود. بهروز به تنهایی در چند ساعت این کار را انجام می دهد؟	۱
۸	مساحت سطح محصور بین نمودار تابع $y = x - 2 $ و خط $y = 1$ را به دست آورید.	۱
۹	تعداد ریشه های معادله $ x - x = 2x$ چند تا است؟	۱
۱۰	دو نقطه $A(-2, 1)$ و $B(3, 4)$ در صفحه مفروض اند. معادله عمود منصف AB را بنویسید.	۱
۱۱	اگر $f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \frac{x+1}{x-2}$ مقدار $f\left(\frac{1}{2}\right)$ چند است؟	۱
۱۲	نمودار هر یک از توابع زیر را رسم نموده و دامنه و برد آن ها را تعیین کنید. $f(x) = 2 - \sqrt{-x + 3} $ $g(x) = x - [x]$	۲/۵

۱۳	تابع $f(x) = x^2 - 2x + 3$ با دامنه $[1, +\infty)$ را در نظر گرفته و ضابطه وارون آن را به دست آورید. سپس نمودار تابع و وارون آن را رسم کرده و دامنه و برد هر یک از آنها را مشخص کنید.	۱/۵
۱۴	اگر $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$ و $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$ ، دامنه و ضابطه توابع $f \circ g$ و $g \circ f$ را به دست آورید.	۱/۵
۱۵	اگر $f = \{(1,2), (2,5), (3,4), (4,6)\}$ و $g = \{(2,3), (4,2), (5,6), (3,1)\}$ باشند، تابع $\frac{g}{g \circ f - 1}$ را به دست آورید.	۱/۵
۱۶	نمودار توابع $2^x, 3^x, \left(\frac{1}{2}\right)^x$ و $\left(\frac{1}{3}\right)^x$ را روی یک دستگاه مختصات رسم کنید. آیا این توابع یک به یک هستند؟ چرا؟	۲
۱۷	سؤال امتیازی: اگر فاصله دو خط موازی $ax - 4y + 24 = 0$ و $x - y + b = 0$ برابر $\sqrt{2}$ باشد، حاصل ضرب مقدارهای ممکن b چه قدر است؟	۱
۱۸	سؤال امتیازی: اگر $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^3 + \frac{1}{x^3}$ ، دامنه تابع $f(x)$ را به دست آورید.	۱

عدد صفحات: ۲ صفحه

۱	مجموع همه عددهای طبیعی دو رقمی مضرب ۷ را به دست آورید. $S_n = \frac{n}{2} (2a_1 + (n-1)d)$ $= \frac{13}{2} (2(14) + 12(7)) = \frac{14 \times 14}{2} (2+6) = 728$ سری حسابی $\{14, 21, \dots, 91, 98\}$ $n = \frac{98-14}{7} + 1 = 13$ (سری حسابی ۹۸)
۲	اگر $x = \frac{1}{2}$ باشد، حاصل $\frac{x+x^2+x^3+\dots+x^{19}}{x^2-x^2+x^2-x^2+\dots-x^2}$ را به دست آورید. $a_1 = x^2, q = x^2, n = 19$ $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ $= \frac{x^2(1-(x^2)^{19})}{1-x^2} = \frac{x^2(1-x^{38})}{1-x^2} = \frac{x^2(1+x^2)}{1-x^2} = \frac{1+x^2}{1-x^2} = \frac{1+\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{5/4}{3/4} = \frac{5}{3}$ سری هندسی (مجموع ۹۸، ۹۹، ۱۰۰)
۳	مقدار k را چنان بیابید که یکی از صفهای تابع $f(x) = x^2 + kx^2 - x - 2$ برابر (-2) باشد. سپس صفهای دیگر تابع را به دست آورید. $f(-2) = 0 = -8 + 4k + 2 - 2 \rightarrow 4k = 8 \rightarrow k = 2$ $x^3 + 2x^2 - x - 2 \div x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ $\begin{array}{r} x^3 + 2x^2 - x - 2 \\ -x^2 + 2x^2 - x - 2 \\ -x - 2 \\ -x - 2 \\ \hline 0 \end{array}$ (سبب درستی)
۴	برای چند عدد صحیح مثل m معادله $x^2 - mx + m^2 - 6 = 0$ دو ریشه حقیقی مختلف العلامت دارد؟ $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ $P = \frac{c}{a} = \frac{m^2 - 6}{1} < 0 \rightarrow m^2 - 6 < 0 \rightarrow m^2 < 6 \rightarrow m < \sqrt{6} \rightarrow -\sqrt{6} < m < \sqrt{6}$ $m \in \mathbb{Z} \rightarrow m = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ بنابراین: اگر $P = \frac{c}{a}$ پس $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ علامت‌های مختلف العلامت دارد. نیز Δ نیز یک‌گانه ندارد. (خبره)
۵	می‌خواهیم ۲۰۰ کیلوگرم محلول آب نمک ۴ درصدی را به محلول آب نمک ۷ درصدی تبدیل کنیم. اگر نمک به اندازه کافی موجود باشد، چند کیلوگرم نمک باید به آن اضافه کنیم؟ $\frac{\text{نمک}}{\text{محلول} + \text{نمک}} = \frac{4}{100} \rightarrow \begin{cases} \text{نمک} = 8 \text{ kg} \\ \text{محلول} = 192 \text{ kg} \end{cases}$ $\frac{x + \text{نمک}}{x + 200} = \frac{7}{100} \rightarrow x = \frac{700}{93} \text{ kg}$ (سبب درستی)
۶	مجموع جواب‌های معادله $x^2 - 4x + 2 = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$ چه قدر است؟ $t - 2 = \sqrt{t}$ $(t-1)^2 = t \rightarrow t^2 - 2t + 1 = t \rightarrow t^2 - 3t + 1 = 0 \rightarrow (t-1)(t-2) = 0$ $t=1 \rightarrow x^2 - 4x + 2 = 0 \rightarrow x = 1, 3$ $t=2 \rightarrow x^2 - 4x + 2 = 0 \rightarrow x = 1, 3$ (سبب درستی ۹۴)

7.	بهر روز یک مجله را به تنهایی ۹ ساعت زودتر از فرهاد تایپ می کند. اگر هر دو با هم کار کنند، در ۲۰ ساعت این کار انجام می شود. بهروز به تنهایی در چند ساعت این کار را انجام می دهد؟ $\frac{1}{t} + \frac{1}{t+9} = \frac{1}{20}$ $\frac{t+9+t}{t(t+9)} = \frac{1}{20}$ $t^2 + 9t = t^2 + 18t - 180 \Rightarrow t - 31t - 180 = 0 \rightarrow x = 36, -5x$ (براسری ۹۸)
۸.	مساحت سطح محصور بین نمودار تابع $y = x - 2$ و خط $y = 1$ را به دست آورید. برای دیدن طرز تلاقظ بر خط $y=1$ پس $b=3$ ، طرفت $a=1$ در طرقت $x=2$ سرتفت ایما دند . بارش ارتعاش $= 1$ ادره عو $S = 3y \cdot \frac{2 \times 1}{2} = 3$ ش. ب. جزوه (قسم ۱۲ اثر ۹۸)
۹.	تعداد ریشه های معادله $x - x = 2x$ چند تا است؟ طرف چپ $\begin{cases} x \geq 0 & x - x = 0 \rightarrow 0 = 2x \rightarrow x = 0 \\ x < 0 & x + x = 2x \quad 2x = -2x = 2x \rightarrow \text{ج. ندارد} \end{cases}$ (خزده)
۱۰.	دو نقطه $A(-2, 1)$ و $B(2, 4)$ در صفحه مفروض اند. معادله عمود منصف AB را بنویسید. فرمت عمود منصف از مرکز به خط برکت و صفا $\sqrt{(x+2)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-4)^2}$ $2x + 3y = 10$ مساکنین نتیجه گیری
۱۱.	اگر $f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \frac{x+1}{x-2}$ مقدار $f\left(\frac{1}{2}\right)$ چند است؟ $\frac{x-1}{x+1} = \frac{1}{2} \rightarrow 2x - 2 = x + 1$ $x = 3$ $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3+1}{3-2} = \frac{4}{1} = 4$ (خزده)
۱۲.	نمودار هر یک از توابع زیر را رسم نموده و دامنه و برد آن ها را تعیین کنید. $\sqrt{-x}$: $\sqrt{x}$ $\sqrt{x-3}$ $\sqrt{-x+3}$ $f(x) = 2 - \sqrt{-x+3}$ شبه $x=3$ $g(x) = x - [x]$ $\begin{cases} -1 < x < 0 \rightarrow [x] = -1 \rightarrow x - (-1) = x + 1 \\ 0 < x < 1 \rightarrow [x] = 0 \rightarrow x - 0 = x \\ 1 < x < 2 \rightarrow [x] = 1 \rightarrow x - 1 \end{cases}$ $\begin{cases} D = (-\infty, 3] \\ R = [0, +\infty) \end{cases}$ $\begin{cases} D = \mathbb{R} \\ R = [0, 1) \end{cases}$ (جزوه)

۱۳	تابع $f(x) = x^2 - 2x + 3$ با دامنه $[1, +\infty)$ را در نظر گرفته و فاصله وارون آن را به دست آورید. سپس نمودار تابع و وارون آن را رسم کرده و دامنه و برد هر یک از آنها را مشخص کنید. $f(n) = x^2 - 2x + 1 + 2 = (x-1)^2 + 2$ $y-2 = (x-1)^2 \rightarrow \sqrt{y-2} = x-1 \rightarrow 1 + \sqrt{y-2} = x \rightarrow 1 + \sqrt{x-2} = f^{-1}(x)$ $\left\{ \begin{aligned} D_f &= [1, +\infty) = R_{f^{-1}} \\ R_f &= [2, +\infty) = D_{f^{-1}} \end{aligned} \right.$ (نکته: برعکس)
۱۴	اگر $g(x) = \sqrt{4-x^2}$ و $f(x) = \sqrt{x^2+5}$ فاصله توابع $g \circ f$ و $f \circ g$ را به دست آورید. $D_f = \mathbb{R}$ $D_g = [-2, 2]$ $D_{f \circ g} = \{x \in D_g, g(x) \in D_f\} = [-2, 2] \left\{ \begin{aligned} f(g(x)) &= \sqrt{(\sqrt{4-x^2})^2 + 5} \\ g(f(x)) &= \sqrt{4 - (\sqrt{x^2+5})^2} \end{aligned} \right.$ $D_{g \circ f} = \{x \in D_f, f(x) \in D_g\} = \emptyset$ (نکته: برعکس)
۱۵	اگر $f = \{(1,2), (2,5), (3,4), (4,6)\}$ و $g = \{(2,3), (4,2), (5,6), (3,1)\}$ باشند، تابع $\frac{g}{g \circ f^{-1}}$ را به دست آورید. $D_g \cap D_{g \circ f^{-1}} = \{5, 4\}$ $\frac{g}{g \circ f^{-1}} = \left\{ (5, \frac{4}{3}), (4, \frac{2}{1}) \right\} = \left\{ (5, \frac{4}{3}), (4, 2) \right\}$ $g \circ f^{-1} = \{(5, 3), (4, 1), (7, 2)\}$ (نکته: برعکس)
۱۶	نمودار توابع $2^x, 3^x, (\frac{1}{2})^x$ و $(\frac{1}{3})^x$ را روی یک دستگاه مختصات رسم کنید. آیا این توابع یک به یک هستند؟ چرا؟ یک به یک اند. زیرا هر خط مماس بر محور توابع را در صورتی که نقطه تقاطع کنند. (نکته: برعکس)
۱۷	سؤال امتحانی: اگر فاصله دو خط موازی $ax - 4y + 24 = 0$ و $x - y + b = 0$ برابر $\sqrt{2}$ باشد، حاصل ضرب مقدارهای ممکن b چه قدر است؟ $\frac{ C - C' }{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sqrt{2} = \frac{ b - 4 }{\sqrt{1+1}}$ $\sqrt{2} = \frac{ b-4 }{\sqrt{2}} \rightarrow 2 = b-4 \rightarrow b-4 = \pm 2 \rightarrow b = 6 \text{ or } b = 2$ $6 \times 2 = 12$ (نکته: برعکس)
۱۸	سؤال امتحانی: اگر $f(x + \frac{1}{x}) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ ، دامنه تابع $f(x)$ را به دست آورید. $x + \frac{1}{x} = t$ $t^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 \rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$ $f(t) = t^2 - 2$ $t^2 - 2 \geq 0 \rightarrow t \geq \sqrt{2} \text{ or } t \leq -\sqrt{2} \rightarrow t \in \mathbb{R} - (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ (نکته: برعکس)