

نام امتحان :

تاریخ امتحان :

مدت زمان امتحان :

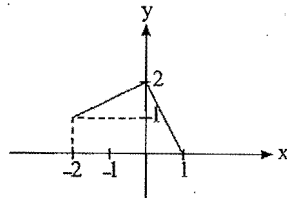
شماره صندلی :

نام :

نام خانوادگی :

پایه تحصیلی : کلاس :

۱. نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت مقابل است. نمودار تابع $y = f(x+1) + 2$ را رسم کنید.



۲. توابع f و g با ضابطه‌های زیر مفروض هستند:

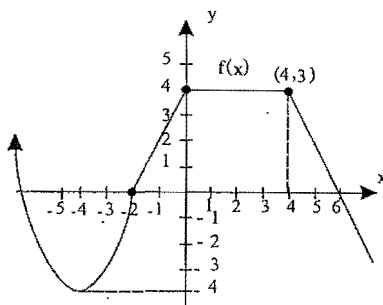
$$f(x) = x^2 + 1 \quad g(x) = \sqrt{-x} - 2$$

الف) دامنه‌ی $f \circ g$

ب) در صورت وجود ضابطه‌ی $g \circ f$ را بنویسید.

۳. اگر $f = \{(5, 3), (8, 9), (-1, 0), (3, 12)\}$ و $g = \{(9, 11), (8, 3), (0, 6), (4, 1), (5, 3)\}$ باشد در این صورت $f \circ g$ و $g \circ f$ را بنویسید.

۴. با استفاده از نمودار تابع $f(x)$ که در شکل زیر رسم شده است، بازه‌هایی که تابع در آن‌ها صعودی، نزولی یا ثابت است را معلوم کنید.



۵. تابع معکوس تابع $f(x) = (x-1)^3 - 2$ را بیابید.

۶. دوره تناوب، ماکزیمم و مینیمم توابع زیر را بیابید.

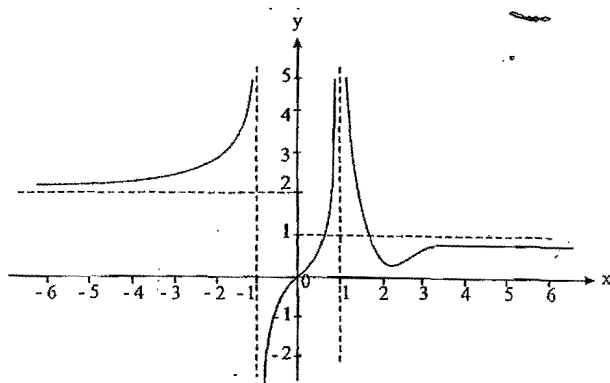
$$1) f(x) = 3 \sin 5x \quad 2) g(x) = -\frac{3}{2} \cos\left(\frac{1}{4}x\right)$$

۷. معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\sin 2x + 3 \cos x = 0$

ب) $3 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 1$

۸. نمودار تابع f به شکل مقابل است. حدود خواسته شده را بنویسید:



الف) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ب) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

ب) $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x)$ ج) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

پ) $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x)$ د) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

۹. حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 16}{\sqrt[3]{x} + 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -6} \frac{9}{(x + 6)^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1 - 5x}{x^2 - 9}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan x$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1 - 5t^2}{t^2 + 3t}$$

نام :
نام خانوادگی :
پایه تحصیلی : کلاس :

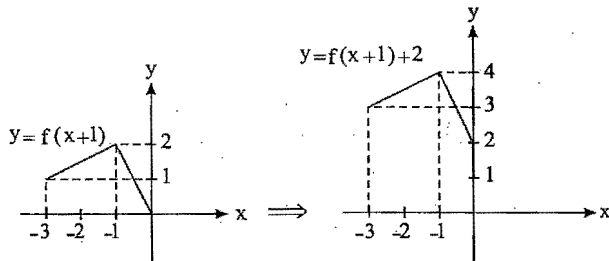
شماره صندلی :

مدت زمان امتحان :

تاریخ امتحان :

نام امتحان :

۱. باید نمودار $y = f(x)$ را یک واحد به چپ و ۲ واحد به بالا منتقل کنیم تا نمودار $y = f(x+1) + 2$ حاصل شود.



۲.

$$f(x) = x^2 + 1 \quad g(x) = \sqrt{-x} - 2$$

$$Df = R \quad Dg : x \leq 0$$

$$Df \circ g(x) = \{x | x \in Dg, g(x) \in Df\} = \left\{ x | x \leq 0, \sqrt{-x} - 2 \in R \right\} \Rightarrow Df \circ g = x \leq 0$$

$$g \circ f(x) = \sqrt{-x^2 - 1} - 2 \Rightarrow -x^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow x \in \emptyset \Rightarrow \text{ضابطه } g \circ f \text{ وجود ندارد.}$$

۳.

$$f \circ g = \{(1, 12)(5, 12)\}$$

$$g \circ f = \{(1, 11)(-1, 6)\}$$

$$f \circ g : \{x \in Dg, g(x) \in Df\} \quad g \circ f : \{x \in Df, f(x) \in Dg\}$$

$$\begin{array}{ll} 9 \rightarrow 11 \rightarrow x & 5 \rightarrow 3 \rightarrow x \\ 8 \rightarrow 3 \rightarrow 12 \rightarrow (1, 12) & 8 \rightarrow 9 \rightarrow 11 \rightarrow (1, 11) \\ 0 \rightarrow 6 \rightarrow x & -1 \rightarrow 0 \rightarrow 6 \rightarrow (-1, 6) \\ 4 \rightarrow 1 \rightarrow x & 3 \rightarrow 12 \rightarrow x \\ 5 \rightarrow 3 \rightarrow 12 \rightarrow (5, 12) & \end{array}$$

۴.

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{3}{2}x + 9 & x > 4 \\ 3 & 0 < x \leq 4 \\ \frac{3}{2}x + 3 & -2 < x \leq 0 \\ (x+4)^2 - 4 & x \leq -2 \end{cases}$$

در بازه های $(-\infty, -4]$, $[4, +\infty)$
تابع نزولی اکید
در بازه‌ی $[0, 4]$ ثابت
در بازه‌ی $[-4, 0]$ اکیداً صعودی است.

رأس سهمی $(-4, -4)$ است.

در $[-4, 4]$ صعودی و در $[0, +\infty)$ نزولی است.

۵. باید در ضابطه تابع x را بر حسب y حل کنیم، که داریم:

$$f(x) = (x-1)^3 - 2 \Rightarrow y = (x-1)^3 - 2 \Rightarrow (x-1)^3 = y+2 \Rightarrow x-1 = \sqrt[3]{y+2}$$

$$\Rightarrow x = 1 + \sqrt[3]{y+2} \Rightarrow y = f^{-1}(x) = 1 + \sqrt[3]{x+2}$$

۶. دوره تناوب توابع $y = a \cos bx$ و $y = a \sin bx$ برابر با $T = \frac{2\pi}{|b|}$ و ماکزیمم آن‌ها $|a|$ و مینیمم آن‌ها $-|a|$ است.

$$۱) f(x) = 4 \sin 5x \rightarrow T = \frac{2\pi}{5}, \quad \max = 4, \quad \min = -4$$

$$۲) g(x) = -\frac{3}{2} \cos\left(\frac{1}{4}x\right) \rightarrow T = \frac{2\pi}{\frac{1}{4}} = 8\pi, \quad \max = \left|-\frac{3}{2}\right| = \frac{3}{2}, \quad \min = -\left|-\frac{3}{2}\right| = -\frac{3}{2}$$

نکته: $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$, $\cos u = 0 \Rightarrow u = k\pi + \frac{\pi}{2}$

نکته: $\sin u = \sin v \rightarrow u = 2k\pi + v$, $u = 2k\pi + \pi - v$

الف) $\sin 2x + 3 \cos x = 0 \Rightarrow 2 \sin x \cos x + 3 \cos x = 0 \Rightarrow \cos x (2 \sin x + 3) = 0$

$\cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$, $2 \sin x + 3 = 0 \Rightarrow \sin x = -\frac{3}{2}$ غ ق

ب) $2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 1 \Rightarrow 2 \times 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 1 \Rightarrow 2 \sin 2\left(\frac{x}{2}\right) = 1$

$\Rightarrow 2 \sin x = 1 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$, $x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}$

۸.

با توجه به شکل داریم:

الف) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$

ب) $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = +\infty$

پ) $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = -\infty$

ت) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$

ث) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$

ج) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

۹.

۱۰. می دانیم: $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

حد صورت و مخرج کسر در $x = -8$ برابر صفر است. پس باید عامل صفر شونده $x + 8$ را حذف کنیم. برای این کار صورت و

مخرج کسر را در عامل $(\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 4)$ ضرب می کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow -8} \frac{2x + 16}{\sqrt[3]{x} + 2} = \lim_{x \rightarrow -8} \frac{2x + 16}{\sqrt[3]{x} + 2} \times \frac{(\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 4)}{(\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 4)} = \lim_{x \rightarrow -8} \frac{2(x+8) \times (\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 4)}{(x+8)}$$

$$= 2 \times (\sqrt[3]{(-8)^2} - 2\sqrt[3]{-8} + 4) = 2(4 + 4 + 4) = 24$$

۱۱. می دانیم: $\frac{\text{عدد مثبت}}{0^+} = +\infty$ و $\frac{\text{عدد منفی}}{0^+} = -\infty$